(6)

RICERCHE

SULLA LINEA LUOGO

DEI

PUNTI DI UN IPERBOLOIDE SGHEMBO

NEI QUALI I DUE RAGGI PRINCIPALI DI CURVATURA DELLA SUPERFICIE
SONO UGUALI IN LUNGHEZZA FRA LORO

DI

GIUSEPPE BRUNO

TORINO
STAMPERIA REALE
1871.

RICERCHE

SULLA LINEA LUOGO

DEI

PUNTI DI UN IPERBOLOIDE SGHEMBO

NEI QUALI I DUE RAGGI PRINCIPALI DI CURVATURA DELLA SUPERFICIE
SONO UGUALI IN LUNGHEZZA FRA LORO

DI

GIUSEPPE BRUNO

TORINO
STAMPERIA REALE
1871.

RICERCHE SULLA LINEA LUOGO

DEI

PUNTI DI UN IPERBOLOIDE SGHEMBO

NEI QUALI I DUE RAGGI PRINCIPALI DI CURVATURA DELLA SUPERFICIE SONO UGUALI IN LUNGHEZZA FRA LORO

1. È noto che, essendo una superficie qualunque riferita a tre assi di coordinate ortogonali x, y e z, e rappresentando, come è d'uso, con

$$\frac{dz}{dx}, \quad \frac{dz}{dy}, \quad \frac{d^2z}{dx^2}, \quad \frac{d^2z}{dxdy} \quad \text{e} \quad \frac{d^2z}{dy^2},$$

le derivate parziali di primo e secondo ordine della z rispetto alla x ed alla y ricavate dall'equazione della superficie, i due raggi principali di curvatura di questa, in un suo punto qualunque avente per coordinate x, y e z, sono i due valori di R che soddisfanno l'equazione:

$$\left[\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}-\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2\right]R^2$$

$$-\left[\begin{array}{c}\left(1+\frac{dz^2}{dy^2}\right)\frac{d^2z}{dx^2}-2\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}\cdot\frac{d^2z}{dx\,dy}\\ +\left(1+\frac{dz^2}{dx^2}\right)\frac{d^2z}{dy^2}\end{array}\right]R\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2}}$$

$$+\left(1+\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2}\right)^2=0\,.$$

Se la superficie considerata è sghemba, avrà in ogni suo punto i suoi due raggi principali di curvatura di segno contrario fra loro, e questi perciò non avranno la stessa lunghezza assoluta se non pei punti della superficie, le coordinate dei quali verificano l'equazione:

$$\left(1+\frac{dz^2}{dy^2}\right)\frac{d^2z}{dx^2}-2\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}\cdot\frac{d^2z}{dx\,dy}+\left(1+\frac{dz^2}{dx^2}\right)\frac{d^2z}{dy^2}=0\ldots(a).$$

Noi ci proponiamo di studiare alcune proprietà della linea luogo dei punti ora detti nell'iperboloide sghembo: e, siccome ci occorrerà di nominarla frequentemente, la denoteremo, per cagione di brevità, col nome di linea H.

2. Un iperboloide sghembo qualunque I sia riferito ai suoi tre assi di figura come assi di coordinate x, y e z; si dicano a e b le lunghezze dei suoi semiassi reali, i quali supporremo diretti secondo gli assi delle x e delle y rispettivamente, e c la lunghezza del semiasse immaginario: esso iperboloide sarà allora rappresentato dall'equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \ldots (1).$$

Ponendo, nell'equazione (a), per le derivate parziali che vi sono contenute, le loro espressioni ricavate dall'equazione (1), essa (a) si riduce alla seguente:

$$\left(1+\frac{c^4x^2}{a^4z^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{c^2y^2}{b^4z^2}\right)\frac{c^2}{z}+2\frac{c^8x^2y^2}{a^4b^4z^5}+\left(1+\frac{c^4y^2}{b^4z^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{c^2x^2}{a^4z^2}\right)\frac{c^2}{z}=0,$$

la quale si può agevolmente trasformare in quest'altra:

$$\frac{c^2-b^2}{a^2}x^2+\frac{c^2-a^2}{b^2}y^2+\frac{a^2+b^2}{c^2}z^2=0\ .$$

Ma se si moltiplicano i due membri dell'equazione (1) per $a^2+b^2-c^2$, e si somma poi membro a membro l'equazione risultante con quella ultima scritta, si ha:

$$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2-c^2 \qquad \ldots \quad (2).$$

La linea H, dunque, della superficie I potrà essere rappresentata dalle equazioni (1) e (2): e siccome la seconda di questa equazione ha per luogo geometrico una sfera, l'ora detta linea H sarà una *linea sferica.*

3. Alla riferita conclusione, ossia alla equazione (2), si può arrivare anche con queste altre considerazioni:

Nei punti di una superficie qualunque, nei quali i due raggi principali di curvatura della medesima sono uguali e di segno contrario fra di loro, si sa che l'indicatrice della superficie è un'iperbole equilatera, della quale, cioè, gli assintoti sono ortogonali. Per l'iperboloide I, d'altronde, gli assintoti dell'indicatrice relativa ad un punto qualunque della superficie sono le due generatrici rettilinee di questa che si tagliano in quel suo punto. La linea H della superficie I sarà, pertanto, il luogo dei punti di essa

superficie, per ciascuno dei quali le due generatrici rettilinee della medesima, che vi si incontrano, sono disposte ad angolo retto fra di loro.

Ora dalla geometria analitica si ha che le equazioni di una delle generatrici rettilinee di I, che passano pel punto m di questa superficie, il quale ha per coordinate x, y e z, sono:

$$\begin{cases} X_1 - x = \dfrac{bxz + acy}{b(z^2 + c^2)}(Z_1 - z) \;, \\ Y_1 - y = \dfrac{ayz - bcx}{a(z^2 + c^2)}(Z_1 - z) \;, \end{cases}$$

nelle quali X_1, Y_1, Z_1 sono le coordinate correnti della generatrice rispettivamente parallele agli assi delle x, y e z: ed ancora che, rappresentando analogamente con X_2, Y_2 e Z_2 le coordinate correnti dell'altra generatrice rettilinea di I, che passa per l'accennato punto m, le equazioni di quest'altra generatrice sono:

$$\begin{cases} X_2 - x = \dfrac{bxz - acy}{b(z^2 + c^2)}(Z_2 - z) \;, \\ Y_2 - y = \dfrac{ayz + bcx}{a(z^2 + c^2)}(Z_2 - z) \;. \end{cases}$$

Affinchè l'angolo, che le ora dette generatrici fanno fra di loro, sia retto, fra i coefficienti angolari delle loro proiezioni bisogna, e basta, che sussista la relazione espressa dall'equazione:

$$1 + \frac{b^2 x^2 z^2 - a^2 c^2 y^2}{b^2 (z^2 + c^2)^2} + \frac{a^2 y^2 z^2 - b^2 c^2 x^2}{a^2 (z^2 + c^2)^2} = 0 \;,$$

che agevolmente si trasforma nella seguente

$$(z^2+c^2)^2+(x^2+y^2)(z^2+c^2)-c^2(a^2+b^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)=0,$$

ed, a cagione dell'equazione (1), anche in quest'altra

$$(z^2+c^2)(x^2+y^2+z^2-a^2-b^2+c^2)=0\ ,$$

la quale è verificata sempre, e solo, quando le x, y e z soddisfanno all'equazione (2).

4. Perchè la sfera rappresentata dall'equazione (2) sia reale, è sufficiente che i semiassi dell'iperboloide abbiano fra loro la relazione espressa dall'ineguaglianza $c^2<a^2+b^2$. Ma, perchè esista la linea H, si richiede dippiù che la detta sfera tagli la superficie I, ossia che il raggio della sfera sia più lungo del semiasse minore dell'ellisse di gola dell'iperboloide. Questo semiasse minore supporremo d'ora in poi sia quello, che si è denotato con b: affinchè la linea H sia reale, dovrà aversi dunque

$$a^2+b^2-c^2>b^2\ ,$$

o, più semplicemente,

$$a>c\ .$$

5. Dalla forma delle equazioni (1) e (2) della linea H risulta che questa linea è simmetrica rispetto a ciascun piano coordinato, e generalmente composta di due rami chiusi e staccati, i quali, quando si ha $c<b$, sono collocati da parti opposte rispetto al piano dell'ellisse di gola dell'iperboloide; e, quando è $c>b$, sono situati l'uno dall'una, l'altro dall'altra parte del piano dell'iperbole, sezione principale di I, il cui asse trasverso si confonde coll'asse maggiore dell'ellisse di gola della detta superficie.

6. Per la linea H della superficie I può farsi passare un numero infinito di iperboloidi rigati diversi da I, ognuno dei quali però, a cagione della simmetria di H rispetto ai piani coordinati, avrà questi stessi piani per suoi piani principali: avrà cioè la sua equazione della forma

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-\frac{z^2}{C^2}=1 \quad \ldots\ldots (3),$$

dove A^2, B^2 e C^2 sono quantità tutte tre positive, oppure una qualunque delle prime due è positiva, essendo negative le altre, ed i cui valori assoluti uguagliano rispettivamente i quadrati dei tre semiassi dell'iperboloide considerato.

Infatti, l'iperboloide rappresentato dall'equazione (3) passa per la linea H dell'iperboloide I, ossia per la linea le cui equazioni sono le (1) e (2), se di queste due equazioni e della (3) una qualunque è conseguenza necessaria delle altre due; od altrimenti, se, eliminando una delle coordinate, la z per esempio, prima fra la (1) e la (2), poi fra la (2) e la (3), si ottengono due equazioni identiche.

Le equazioni, che si hanno colle eliminazioni ora dette sono queste che seguono:

$$x^2\frac{a^2+c^2}{a^2}+y^2\frac{b^2+c^2}{b^2}=a^2+b^2 \quad \ldots (4),$$

$$x^2\frac{A^2+C^2}{A^2}+y^2\frac{B^2+C^2}{B^2}=C^2+a^2+b^2-c^2$$

e, per la loro identità, è sufficiente che sieno verificate le due condizioni

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{A^2(C^2+a^2+b^2-c^2)}{A^2+C^2}=\dfrac{a^2(a^2+b^2)}{a^2+c^2}\\[2ex]\dfrac{B^2(C^2+a^2+b^2-c^2)}{B^2+C^2}=\dfrac{b^2(a^2+b^2)}{b^2+c^2}\end{array}\right\}\ldots(5);$$

il che può avvenire in un'infinità di modi, essendo tre le indeterminate, delle quali si può disporre.

7. Cerchiamo se fra il numero infinito di iperboloidi, dei quali abbiamo ora parlato, ve ne sia alcuno, il quale abbia per sua linea H la linea H dell'iperboloide I. A questo fine osserviamo che, da quanto fu esposto al numero 2, la linea H d'uno qualunque degli iperboloidi rappresentati dall'equazione (3) ha per equazioni sue la detta equazione (3) e la seguente:

$$x^2+y^2+z^2=A^2+B^2-C^2\ ,$$

e questa linea coincide con quella che ha per sue equazioni le (1) e (2), se fra A^2, B^2 e C^2 sia soddisfatta la relazione

$$A^2+B^2-C^2=a^2+b^2-c^2\ ,$$

simultaneamente alle due equazioni (5).

Da queste tre equazioni facilmente si ricavano dapprima le seguenti espressioni di A^2 e B^2 per mezzo di C^2:

$$\left.\begin{array}{l}A^2=\dfrac{a^2(a^2+b^2)C^2}{c^2(b^2-c^2)+(a^2+c^2)C^2}\\[2ex]B^2=\dfrac{b^2(a^2+b^2)C^2}{c^2(a^2-c^2)+(b^2+c^2)C^2}\end{array}\right\}\ldots(6),$$

e quindi, per determinare C^2, l'equazione

$$\left.\begin{array}{l} C^6(b^2+c^2)(a^2+c^2)-C^4\left[3c^6-c^2(a^4+b^4-a^2b^2)+a^2b^2(a^2+b^2)\right] \\ +3c^4C^2(a^2-c^2)(b^2-c^2)+c^4(a^2-c^2)(b^2-c^2)(a^2+b^2-c^2)=0 \end{array}\right\} (7),$$

la quale, essendo di terzo grado rispetto a C^2, fa vedere che in generale vi sono tre iperboloidi rigati, che hanno per loro comune linea H il luogo delle equazioni (1), (2). Manifestamente I è uno di questi iperboloidi; ed invero l'equazione (7) è verificata, ponendo in essa c^2 in luogo di C^2, ed a questo valore di C^2 corrispondono a^2 e b^2 rispettivamente per quelli di A^2 e B^2.

Spogliando la (7) della radice testè accennata, si ottiene, per determinare gli altri due valori di C^2, l'equazione:

$$\left.\begin{array}{l} C^4(b^2+c^2)(a^2+c^2)-C^2(a^2-c^2)(b^2-c^2)(a^2+b^2+2c^2) \\ -c^2(a^2-c^2)(b^2-c^2)(a^2+b^2-c^2)=0 \end{array}\right\} \ldots (8).$$

8. Discutiamo quest'equazione:

Supponendo in prima che sia $b > c$, i valori di C^2, che somministra la (8), sono tutti due reali, uno positivo l'altro negativo. Le equazioni (6) fanno vedere che al valore positivo di C^2 corrispondono valori di A^2 e B^2 pure positivi, e tali, inoltre, che è pur positiva la differenza $A^2 - B^2$, poichè l'espressione di essa è

$$\frac{(a^4-b^4)(A^2+B^2)c^2C^2}{[c^2(b^2-c^2)+(a^2+c^2)C^2][c^2(a^2-c^2)+(b^2+c^2)C^2]}.$$

Tali valori di A^2, B^2 e C^2 dimostrano l'esistenza di un iperboloide sghembo I', il quale ha il suo asse immaginario, ed il maggiore ed il minore de' suoi assi reali rispettivamente disposti secondo le rette su cui giacciono gli assi analoghi dell'iperboloide I. Questi due iperboloidi

sono generalmente distinti fra loro, non confondendosi fuorchè quando fosse $c^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$.

Nella stessa ipotesi $(b > c)$, al valore negativo di C^2 somministrato dalla (8) corrisponde un valore positivo di A^2, ed uno negativo di B^2. Infatti, il detto valor negativo di C^2 è compreso fra $-c^2\frac{a^2-c^2}{b^2+c^2}$ e $-c^2\frac{b^2-c^2}{a^2+c^2}$, perchè, sostituite queste due quantità a C^2 nel primo membro della (8), si hanno rispettivamente i risultati

$$\frac{b^2c^2(a^2-c^2)(a^4-b^4)}{b^2+c^2} \text{ e } -\frac{a^2c^2(b^2-c^2)(a^4-b^4)}{a^2+c^2},$$

i quali sono manifestamente di segno fra loro contrario. Ora, per un valore qualunque di C^2 compreso fra i limiti testè accennati, le espressioni (6) di A^2 e di B^2 hanno tutte due il numeratore essenzialmente negativo, mentre il denominatore è pure negativo nell'espressione di A^2, positivo invece in quella di B^2. Quindi, al sistema di valori di A^2, B^2 e C^2, del quale qui si parla, corrisponde un iperboloide ad una sol falda I'', il quale ha gli stessi piani principali che I ed I', ma ha il suo asse immaginario disposto secondo gli assi minori delle ellissi di gola dei detti iperboloidi I ed I'.

Consideriamo ora il caso in cui sia $b < c$.

L'equazione (8) potrà dare allora per C^2 due valori immaginarii: tal cosa arriverà quando sia

$$8a^2b^2c^2 > (a^2-c^2)(c^2-b^2)(b^2+a^2) \quad \ldots (9),$$

ed in tal caso, oltre l'iperboloide I, non ve ne sarà altro, la cui linea H abbia per sue equazioni le (1) e (2).

Ma se, essendo $b < c$, l' ineguaglianza (9) non è verificata, i due valori di C^2, che si ricavano dalla (8), sono entrambi reali e negativi: anzi è facile il provare che sono tutti due compresi fra zero e $-c^2\frac{a^2-c^2}{b^2+c^2}$. Imperocchè i risultati della sostituzione di zero e di $-c^2\frac{a^2-c^2}{b^2+c^2}$, in luogo di C^2, nel primo membro della (8), sono rispettivamente

$$c^2(a^2-c^2)(c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2) \text{ e } \frac{b^2c^2(a^2-c^2)(a^4-b^4)}{b^2+c^2},$$

quantità, cioè, positive tutte due; invece se, fatta la derivata del primo membro della (8), si sostuiscono in essa a C^2 successivamente i detti valori zero e $-c^2\frac{a^2-c^2}{b^2+c^2}$, si ottengono rispettivamente i risultati

$$(a^2-c^2)(c^2-b^2)(a^2+b^2+2c^2)$$

e

$$-(a^2-c^2)(c^2+b^2)(b^2+a^2),$$

i quali hanno segno contrario fra loro. Per ciascuno poi di questi valori negativi di C^2, le (6) danno un valore positivo per A^2 ed uno negativo per B^2. Si hanno dunque, nell'ipotesi che abbiamo fatta, ancora due iperboloidi sghembi I' ed I'' (i quali si confonderebbero in un solo quando i valori di a, b e c rendessero uguali fra di loro i due membri dell'ineguaglianza (9)), aventi ciascuno comuni con I i suoi piani principali e la linea H. Gli assi immaginari di questi iperboloidi sono disposti ancor quivi secondo il minor asse dell'ellisse di gola di I.

Si può aggiungere che gli iperboloidi corrispondenti a valori negativi di C^2; tanto nel caso in cui la (8) somministri un solo, quanto nel caso in cui essa da due di questi valori negativi, hanno i semiassi maggiori delle loro ellissi di gola giacenti sul semiasse maggiore dell'ellisse di gola dell' iperboloide I.

Infatti, i quadrati dei semiassi dell'ellisse di gola di uno degli iperboloidi, pei quali C^2 è negativo, sono A^2 e $-C^2$, e la differenza di questi quadrati

$$A^2+C^2=\frac{a^2(a^2+b^2)C^2}{c^2(b^2-c^2)+(a^2+c^2)C^2}+C^2$$

$$=\frac{C^2(a^2+c^2)(a^2+b^2-c^2+C^2)}{c^2(b^2-c^2)+(a^2+c^2)C^2}$$

ha lo stesso segno che $a^2+b^2-c^2+C^2$. Ma siccome, qualunque delle quantità b e c sia maggiore dell'altra, si è veduto che ogni valore negativo di C^2, il quale soddisfi la (8), verifica l'ineguaglianza $C^2>-c^2\frac{a^2-c^2}{b^2+c^2}$, epperciò anche l'altra ineguaglianza seguente

$$a^2+b^2-c^2+C^2>a^2+b^2-c^2-c^2\frac{a^2-c^2}{b^2+c^2}$$

$$>a^2+b^2-c^2\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}>\frac{(a^2+b^2)b^2}{b^2+c^2},$$

ne consegue che si avrà

$$A^2+C^2>0,$$

ossia A^2 sarà il quadrato del semiasse maggiore dell'ellisse di gola dell'iperboloide che si considera.

Riassumendo, dunque, si potrà stabilire che, se fra i semiassi d'un iperboloide sghembo qualunque dato I non sia verificata l'ineguaglianza (9), esisteranno due altri iperboloidi rigati I' e I'', i quali si tagliano fra loro e con I secondo una linea, che è la linea H di ciascuno dei tre iperboloidi. Queste tre superficie hanno gli assi maggiori delle loro ellissi di gola disposti secondo una stessa retta: gli assi minori invece delle ellissi di gola di due di quegli iperboloidi cadono sulla retta, secondo la quale giace l'asse immaginario del terzo.

9. Esaminiamo ora alcuni casi particolari.

Se è $a=b$, ossia se l'iperboloide I è di rivoluzione, siccome, qualunque sia il valore di C^2, si ha dalle (6) che in quell'ipotesi è $A^2=B^2$, gli iperboloidi I' e I'' saranno essi pure di rivoluzione attorno allo stesso asse che I. In tal caso, inoltre, la linea luogo delle equazioni (1) e (2), ossia la linea H di I è composta di due paralleli di questa superficie, i cui piani sono simmetricamente collocati rispetto al centro di questa. D'altronde, i valori di C^2, che si hanno allora dall'equazione (8), essendo $\frac{(2a^2-c^2)(a^2-c^2)}{a^2+c^2}$ e $-c^2\frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}$, al primo dei quali corrisponde $A^2=B^2=\frac{a^2(2a^2-c^2)}{a^2+c^2}$, ed al secondo $A^2=B^2=\infty$, si arguisce che un iperboloide rigato di rivoluzione non ha comune la linea H fuorchè con un solo altro iperboloide rigato, esso pure di rivoluzione attorno lo stesso asse che l'iperboloide dato (*).

(*) Il terzo iperboloide si riduce, in questo caso, al sistema dei piani dei paralleli di I, che formano la linea H di questa superficie.

È rimarchevole poi la relazione $\frac{c^2}{a^2}+\frac{C^2}{A^2}=1$, che sussiste fra i coefficienti angolari degli assintoti delle iperboli meridiane di detti due iperboloidi: da essa si fa evidente che, se fosse $a^2=2c^2$, quei due iperboloidi si confonderebbero in un solo.

Pongasi ora che sia $b=c$, essendo, come si è supposto in generale finora, $a>b$. Le equazioni (1) e (2) provano che in tal caso la linea H dell'iperboloide I è composta di due rami piani, epperciò circolari; i piani, in cui giacciono i detti rami, si tagliano secondo il maggior asse dell'ellisse di gola di quella superficie, e sono rappresentati complessivamente dall'equazione

$$y=\pm z\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}.$$

E siccome, poi, le radici dell'equazione (8) sono entrambe nulle, ed inoltre, per $C^2=0$, la seconda delle equazioni (6) dà $\frac{B^2}{C^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$, resta dimostrato che, nel caso che ora trattiamo, gli iperboloidi I' ed I'' si confondono fra di loro e col sistema dei piani sopra accennati.

Manifestamente quando si abbia $a=c$ (essendo $b<a$), la linea H si riduce a due soli punti, che sono le estremità dell'asse minore dell'ellisse di gola di I. E qualunque iperboloide rappresentato dalla equazione (3), i semiassi del quale adempiano le condizioni $A=C>B$; $B=b$, avrà, nella nostra ipotesi, la sua linea H ridotta agli stessi due punti, ai quali essa si riduce per l'iperboloide I.

Parimente è chiaro che, essendo $a = b = c$, i due paralleli, dei quali in generale si compone la H, quando I è di rivoluzione, vengono a confondersi fra loro e col circolo di gola dell'iperboloide; e che nessun altro iperboloide ha allora la stessa linea H che l'iperboloide dato, seppure non voglia dirsi che gli altri due si riducono entrambi al piano del circolo di gola di I.

Nè difficile riesce l'esame del caso in cui l'iperboloide I degenera in un paraboloide iperbolico. La linea H si riduce allora alla sezione fatta nella superficie da un piano perpendicolare all'asse di simmetria della medesima nel punto di quest'asse, che è, rispetto al vertice del paraboloide, collocato da parte opposta ed a distanza doppia che il punto di mezzo della retta congiungente i fuochi delle parabole sezioni principali della superficie. Essa linea H è poi comune al paraboloide dato e ad un altro ad esso sovrapponibile, la cui posizione si ottiene facendo compiere al paraboloide dato un quarto di giro attorno al suo asse, e facendolo in seguito scorrere parallelamente all'asse stesso, tanto che il vertice prenda, rispetto al piano dell'accennata linea H, una posizione simmetrica a quella che esso occupava dapprincipio. Quando però il paraboloide dato fosse equilatero, la linea H si ridurrebbe alle due generatrici rettilinee che passano pel vertice della superficie, e sarebbe comune a tutti i paraboloidi iperbolici equilateri aventi comuni col dato il vertice ed i piani principali.

10. La linea H dell'iperboloide I ha l'equazione (4) per equazione della sua proiezione sul piano delle x e delle y; le proiezioni della stessa linea H sui piani delle

x e z e delle y e z sono rispettivamente rappresentate dalle equazioni

$$\frac{x^2(a^2-b^2)}{a^2}+\frac{z^2(b^2+c^2)}{c^2}=a^2-c^2 ,$$

$$\frac{z^2(a^2+c^2)}{c^2}-\frac{y^2(a^2-b^2)}{b^2}=b^2-c^2 .$$

Le tre proiezioni, delle quali parliamo, sono dunque linee di secondo grado concentriche all'iperboloide, e coi loro assi disposti rispettivamente secondo due degli assi dell'iperboloide stesso. Dippiù le proiezioni di H sul piano dell'ellisse di gola, e su quello che passa per l'asse maggiore di questa ellisse e per l'asse immaginario della superficie, sono ellissi.

Una di queste ellissi però avrà archi parassiti, e questa è la prima, o la seconda rispettivamente delle proiezioni testè accennate, secondochè c è maggiore, oppure minore, di b. La proiezione, per contro, di H sul piano principale di I, che è perpendicolare al maggior asse reale di questa superficie, è una iperbole i cui assi cadono, come si disse, secondo gli assi della iperbole sezione fatta nella superficie da quel piano principale, e precisamente il trasverso sul trasverso e l'immaginario sull'immaginario quando è $b<c$, inversamente quando fosse $b>c$. Questa proiezione iperbolica poi ha sempre archi parassiti.

11. La linea rappresentata dall'equazione (1) e (2) può dunque riguardarsi come l'intersezione di un cilindro ellittico od iperbolico con una sfera, della quale il centro sia collocato sull'asse del cilindro.

Anzi, si può provare che qualunque cilindro ellittico od iperbolico taglia una sfera qualunque avente il suo centro sull'asse del cilindro secondo una linea, che è la linea H sempre di uno, e generalmente di tre iperboloidi rigati.

Preso, infatti, il centro della sfera per origine del sistema di coordinate ortogonali, che adotteremo, delle x, y e z, e per asse delle z l'asse del cilindro, dirigiamo gli assi delle x e delle y secondo i due assi della sezione retta del cilindro medesimo. Chiamato allora ρ il raggio della sfera, ed α^2 e β^2 i quadrati dei semiassi dell'accennata sezione retta, che sono rispettivamente disposti secondo l'asse delle x e quello delle y, le equazioni dell'accennata intersezione sono quelle che seguono:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1 \\ x^2+y^2+z^2=\rho^2 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (10),$$

nelle quali, se l'intersezione accennata esiste realmente, si potrà, senza diminuire la generalità della discussione che faremo in seguito, sempre supporre che α^2 e ρ^2 sieno tutti due positivi e non minori di β^2, e che, inoltre, quando β^2 è negativo, sia ρ^2 maggiore od almeno uguale ad α^2.

Ciò premesso, siccome la linea rappresentata dalle equazioni (10) è simmetrica rispetto ai piani coordinati, se essa è la linea H di qualche iperboloide rigato, questo avrà per suoi piani principali i detti piani coordinati, e per sua equazione potremo assumere la (1), nella quale dovremo determinare i valori di a^2, b^2 e c^2. Di questi valori già si sa che devono essere o tutti tre positivi,

o positivo uno dei primi due e gli altri negativi: essi poi si determinano, esprimendo che il sistema delle equazioni (1) e (2) è identico con quello delle equazioni (10). E poichè al sistema delle (1) e (2) si può sostituire quello delle (2) e (4), si fa manifesto che, per ottenere l'accennata identità, bisogna che a^2, b^2 e c^2 verifichino le equazioni

$$\alpha^2 = a^2 \frac{a^2+b^2}{a^2+c^2},$$

$$\beta^2 = b^2 \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2},$$

$$\rho^2 = a^2+b^2-c^2.$$

Tratte dalle prime due di queste equazioni le espressioni di a^2 e b^2 per mezzo di c^2,

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= \frac{c^2\alpha^2}{\rho^2+c^2-\alpha^2} \\ b^2 &= \frac{c^2\beta^2}{\rho^2+c^2-\beta^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (11),$$

e sostituitele nella terza di esse, questa si potrà scrivere così:

$$\left.\begin{aligned} &c^6+(3\rho^2-2\alpha^2-2\beta^2)c^4 \\ &+3(\rho^2-\alpha^2)(\rho^2-\beta^2)c^2+\rho^2(\rho^2-\alpha^2)(\rho^2-\beta^2)=0 \end{aligned}\right\} \ldots (12),$$

e servirà a determinare c^2.

12. Per quello che si è detto più sopra nella discussione di quest'equazione, oltre i casi eccezionali in cui due delle quantità ρ^2, α^2, β^2 sono uguali fra di loro, e che tratteremo a parte, dovremo considerare i tre casi

principali seguenti: 1° quando sia $\alpha^2 > \rho^2$; $\rho^2 > \beta^2$; $\beta^2 > 0$; 2° quello in cui si abbia $\rho^2 > \alpha^2$; $\alpha^2 > \beta^2$; $\beta^2 > 0$; 3° finalmente il caso in cui è $\rho^2 > \alpha^2$; $\alpha^2 > 0$; $\beta^2 < 0$. Ma dimostreremo che la considerazione d'un solo di essi è anche sufficiente per la compiuta discussione del problema. Ed in verità, la linea luogo delle equazioni (10) ha per equazioni delle sue proiezioni sui piani delle x e z, e delle y e z rispettivamente le seguenti:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{\alpha_1^2} + \dfrac{z^2}{\gamma_1^2} = 1 \\ \dfrac{y^2}{\beta_2^2} + \dfrac{z^2}{\gamma_2^2} = 1 \end{array}\right\} \quad \ldots . \quad (13),$$

nelle quali, per brevità, si è fatto

$$\alpha_1^2 = \alpha^2 \frac{\rho^2 - \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2},$$

$$\gamma_1^2 = \rho^2 - \beta^2,$$

$$\beta_2^2 = \beta^2 \frac{\alpha^2 - \rho^2}{\alpha^2 - \beta^2},$$

$$\gamma_2^2 = \rho^2 - \alpha^2.$$

Ora da queste eguaglianze si ricava che, quando è

$$\alpha^2 > \rho^2 ; \quad \rho^2 > \beta^2 ; \quad \beta^2 > 0,$$

è pure

$$\rho^2 > \alpha_1^2 ; \quad \alpha_1^2 > \gamma_1^2 ; \quad \gamma_1^2 > 0 ;$$

$$\rho^2 > \beta_2^2 ; \quad \gamma_2^2 < 0 ;$$

che, invece, se si supponga essere

$$\rho^2 > \alpha^2 ; \quad \alpha^2 > \beta^2 ; \quad \beta^2 > 0,$$

ne consegue che sarà altresì

$$\alpha_1^2 > \rho^2 \;;\quad \rho^2 > \gamma_1^2 \;;\quad \gamma_1^2 > 0 \;;$$

$$\rho^2 > \gamma_2^2 \;;\quad \beta_2^2 < 0 \,,$$

e, finalmente, che nel caso in cui fosse

$$\rho^2 > \alpha^2 \;;\quad \beta^2 < 0 \,,$$

sarebbe anche

$$\gamma_1^2 > \rho^2 \;;\quad \rho^2 > \alpha_1^2 \;;\quad \alpha_1^2 > 0 \;;$$

$$\rho^2 > \gamma_2^2 \;;\quad \gamma_2^2 > \beta_2^2 \;;\quad \beta_2^2 > 0 \,.$$

Cioè, che dei tre cilindri rappresentati dalla prima delle equazioni (10) e dalle due equazioni (13) uno ha sempre per sezione retta un' iperbole, il cui semiasse reale è minore di ρ, gli altri due invece hanno per sezione retta un' ellisse: e queste ellissi dippiù hanno tutte due il loro asse minore più breve di ρ, mentre la lunghezza di ρ è compresa fra quelle dell'asse maggiore dell'una e la lunghezza dell'asse maggiore dell'altra delle ellissi, di cui si parla.

Qualunque delle contemplate relazioni abbiano fra loro le quantità α^2, β^2 e ρ^2, la linea luogo delle equazioni (10) si può riguardare sempre come l' intersezione della sfera rappresentata dalla seconda delle ora nominate equazioni con uno qualsivoglia dei tre cilindri poc'anzi accennati; epperò, come ci eravamo proposto di provare, sarà chiaro che la discussione del numero e della posizione relativa degli iperboloidi rigati, che hanno per loro linea comune *H* la linea rappresentata dalle equazioni (10), sarà

completa ancorchè ci limitiamo a considerare il caso, in cui i valori di ρ^2, α^2 e β^2 soddisfanno ad una sola qualunque delle tre ipotesi più sopra fatte sulle dette quantità, per esempio alla prima, cioè suppongasi

$$\alpha^2 > \rho^2 \; ; \quad \rho^2 > \beta^2 \; ; \quad \beta^2 > 0 \; .$$

13. In questa supposizione, l'equazione (12) darà per c^2 sicuramente un valore reale e positivo, maggiore anzi di $\alpha^2 - \rho^2$. Imperocchè, sostituendo nel primo membro di detta equazione $\alpha^2 - \rho^2$ in luogo di c^2, si ha per risultato la quantità negativa $-\alpha^2(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \rho^2)$; mentre, fatto c^2 positivo e sufficientemente grande, il primo membro suddetto della (12) si riduce ad una quantità positiva. Le espressioni di α^2 e β^2, che si hanno nelle (11), fanno poi vedere che, per l'accennato valore di c^2, sono esse pure positive, e che dippiù è $a^2 > b^2$. Esisterà dunque un iperboloide rigato I, che ha per sua linea H l'intersezione della sfera e del cilindro dato: l'asse immaginario dell'iperboloide, e gli assi maggiore e minore della sua ellisse di gola saranno disposti rispettivamente secondo l'asse del cilindro, e secondo gli assi maggiore e minore dell'ellisse sezione retta del cilindro stesso, il piano della quale passa pel centro della sfera. Provata così l'esistenza di uno, da ciò che si è detto dal n° 7 al n° 9, sarà pure dimostrato che, in generale, esisteranno tre iperboloidi sghembi, i quali hanno per loro linea comune H la linea rappresentata dalle equazioni (10).

14. Ma, comunque si possa prevedere che i risultati, che otterremo, non differiranno da quelli già avuti,

proseguendo nella discussione diretta della equazione (12), osserveremo che questa equazione, oltre il già accennato valore di c^2, ne somministra altri due reali, se ρ^2, α^2 e β^2 verificano l'ineguaglianza $\rho^2 > \frac{9\alpha^2\beta^2(\alpha^4+\beta^4-\alpha^2\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^3}$ (*). Questi sono tutti e due negativi e numericamente minori di $\rho^2-\beta^2$. Infatti, se si sostituisce dapprima zero, poi $-(\rho^2-\beta^2)$ in luogo di c^2 nel primo membro della (12), questo si riduce rispettivamente a $-\rho^2(\alpha^2-\rho^2)(\rho^2-\beta^2)$ e $-\beta^2(\alpha^2-\beta^2)(\rho^2-\beta^2)$, quantità tutte due negative: se si fanno, invece, le stesse sostituzioni nella derivata del primo membro di quell'equazione, si ottengono i risultati $-3(\alpha^2-\rho^2)(\rho^2-\beta^2)$ e $(\alpha^2+\beta^2)(\rho^2-\beta^2)$, i quali sono l'uno negativo e l'altro positivo.

Ad ognuno poi di questi valori negativi di c^2 le (11) danno un corrispondente valore positivo di a^2, ed uno negativo di b^2. Ed osservando ancora che il binomio $a^2+c^2=\frac{c^2(\rho^2+c^2)}{\rho^2+c^2-\alpha^2}$ è, per i valori negativi di c^2, dei quali parliamo, essenzialmente positivo, potremo affermare che, per ognuno degli accennati valori negativi di c^2, si avrà un iperboloide sghembo avente comune coll'iperboloide I la linea H, e gli assi maggiore e minore della sua ellisse di gola disposti rispettivamente secondo il

(*) Essendo, per ipotesi, $\rho^2<\alpha^2$, affinchè l'ineguaglianza riferita nel testo possa essere soddisfatta, bisogna che si abbia

$$(\alpha^2+\beta^2)^3>9\beta^2(\alpha^4+\beta^4-\alpha^2\beta^2),\ \text{ossia}\ (\alpha^2-2\beta^2)^3>0\ .$$

Se, dunque, non è $\alpha^2>2\beta^2$, l'equazione (12) non avrà mai più d'una radice reale, e non esisterà certamente più d'un iperboloide rigato, la cui linea H abbia per sue equazioni le (10).

maggior asse dell'ellisse sezione retta del cilindro e l'asse del cilindro medesimo.

15. Se il raggio ρ della sfera è uguale al semiasse maggiore α della sezione retta del cilindro, la linea rappresentata dalle equazioni (10) è composta delle due sezioni circolari del detto cilindro, i cui piani passano pel centro della sfera, e dei quali il sistema è luogo dell'equazione $y=\pm\frac{\beta z}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$. La prima delle equazioni (11) fa vedere che, qualunque sia il valore di c^2, è $a^2=\alpha^2$, e l'equazione (12) che dei tre valori di c^2 due sono nulli, ed il terzo è $2\beta^2-\alpha^2$. Dalla seconda delle equazioni (11) poi si ricava che, per $c^2=0$, si ha $\frac{b^2}{c^2}=\frac{\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$, e per $c^2=2\beta^2-\alpha^2$ è pure $b^2=2\beta^2-\alpha^2$.

Tutto questo dimostra che dei tre iperboloidi, i quali, in generale, hanno per loro comune linea H la linea luogo delle equazioni (10), in questo caso, due si confondono tra di loro e col sistema dei piani delle sezioni circolari sunnominate del cilindro: il terzo poi ha il suo asse immaginario della stessa lunghezza che l'asse minore della sua ellisse di gola, e l'asse maggiore di questa ellisse uguale in lunghezza, come si è detto, e coincidente in direzione con l'asse maggiore della sezione retta del cilindro; a seconda poi che è verificata l'ineguaglianza $2\beta^2>\alpha^2$, o l'inversa $2\beta^2<\alpha^2$, l'asse immaginario dell'iperboloide è disposto sull'asse del cilindro, o sull'asse minore della sezione retta già nominata del cilindro stesso. Che se, essendo sempre $\rho^2=\alpha^2$, si avesse $\alpha^2=2\beta^2$, il terzo iperboloide coinciderebbe coi primi due, cioè col

sistema dei piani delle sezioni circolari del cilindro, che hanno il loro centro nel centro della sfera.

In modo non diverso si discutono il caso in cui sia $\alpha^2 > \rho^2$ e $\rho^2 = \beta^2$, e quello di $\alpha^2 = \rho^2 = \beta^2$.